STAT0008: Stochastic Processes

Lecture 11 - Birth-death Processes

Lecturer: Weichen Zhao　　Spring 2025

Key concepts:

- 纯生过程;
- 生灭过程。

生灭过程是最简单的连续时间Markov链之一，在排队论、传染病模型等领域有重要的应用。

11.1　纯生过程

纯生过程 (pure birth processes)是 Poisson 过程的一种推广，同时又是更一般的生灭过程的特例。Poisson 过程的增长强度 λ 和当前所处的状态无关，而纯生过程则不然，它在$[t, t+\Delta t]$时间段内的转移概率满足

$$P(X(t+\Delta t)=k|X(t)=n)=\begin{cases}\lambda_n(t)\Delta t+o(\Delta t), & k=n+1\\ o(\Delta t), & k\geqslant n+2\\ 0, & k<n\end{cases}$$

其中$\lambda_n(t)$既是t的函数，又是状态n的函数。此时过程是非齐次的。如果$\lambda_n(t)=\lambda_n$，和t无关，则过程为齐次的。

下面我们考虑一个特殊的齐次纯生过程，称为Yule过程。

Definition 11.1 (Yule过程) 考虑某群体成员通过分裂产生新成员，但是没有消亡。

每一个成员在$[t,t+\Delta t]$内产生一个新成员的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t),\lambda$ 为一常数；产生两个或者两个以上新成员的概率为$o(\Delta(t))$,确定了群体的增长率。成员之间没有相互作用，即成员产生新成员的行为是相互独立的。

设t时刻群体数目为n，那么在$[t,t+\Delta t]$内群体增加一个成员的概率为

$$C_n^1(\lambda\Delta t+o(\Delta t))(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))^{n-1}=n\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

产生两个或者两个以上成员的概率为$o(\Delta t)$，以$X(t)$表示时刻t群体的规模，则$\{X(t)\}$称为*Yule*过程。所以 *Yule* 过程是齐次纯生过程的特例，其中$\lambda_n=n\lambda$。

Proposition 11.2 假设$\{X(t)\}$为从 $X(0)=1$ 出发的 *Yule* 过程，则

$$P(X(t)=j\mid X(0)=1)=\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}\right)^{j-1}\mathrm{e}^{-\lambda t},\quad \forall j\geqslant 1.$$

Proof: 设 T_i 表示已有 i 个成员的条件下，等待下一次分裂的时间，则 $T_i\sim\mathcal{E}(i\lambda)$，$T_1,T_2,\cdots$ 相互独立。在条件 $X(0)=1$ 下，记

$$S_0=0,\quad S_k=T_1+T_2+\cdots+T_k,\quad k\geqslant 1.$$

S_k 表示第 k 次分裂的时间。下面我们证明下式：

$$P(S_k\leqslant t|X(0)=1)=(1-e^{-\lambda t})^k,\quad k\geqslant 1. \tag{$*$}$$

记条件概率 $P_1(\cdot):=P(\cdot|X(0)=1)$. 当 $k=1$ 时，可以得到

$$P_1\left(S_1\leqslant t\right)=\int_0^t\lambda e^{-\lambda s}ds=1-e^{-\lambda t}.$$

(*)式成立；假设(*)对于$k-1$成立，则对于k

$$\begin{aligned}P_1(S_k\leqslant t)&=P_1(S_{k-1}+T_k\leqslant t)\\&=\int_0^t P_1(S_{k-1}+s\leqslant t|T_k=s)dP_1(T_k\leqslant s)\\&=\int_0^t(1-e^{-\lambda(t-s)})^{k-1}\lambda k e^{-\lambda ks}ds\\&=\sum_{j=0}^{k-1}C_{k-1}^j(-1)^j\int_0^t e^{-\lambda j(t-s)}\lambda k e^{-\lambda ks}ds\\&=\sum_{j=0}^{k-1}C_k^j(-1)^j(e^{-\lambda jt}-e^{-\lambda kt})\\&=(1-e^{-\lambda t})^k.\end{aligned}$$

于是(*)式成立。由此可以得到 Yule 过程的转移概率

$$
\begin{aligned}
P_{1j}(t) =& P_1(X(t)=j) = P_1(S_{j-1} \leqslant t < S_j) \\
=& P_1(S_{j-1} \leqslant t) - P_1(S_j \leqslant t) \\
=& \left(1-e^{-\lambda t}\right)^{j-1} - \left(1-e^{-\lambda t}\right)^{j} \\
=& \left(1-e^{-\lambda t}\right)^{j-1} e^{-\lambda t} \\
=& \beta^{j-1}\alpha, \qquad j \geqslant 1,
\end{aligned}
$$

其中 $\alpha \triangleq e^{-\lambda t}$, $\beta \triangleq 1-\alpha$. 上述推导说明在条件 $X(0)=1$ 下, 对于固定的 $t>0$, $X(t)$ 服从参数为 $\alpha = e^{-\lambda t}$ 的几何分布, 有数学期望

$$E(X(t)|X(0)=1) = 1/\alpha = e^{\lambda t}.$$

■

注1. 当一开始有 i 个群体成员时, 用 Y_k 表示第 k 个个体在 t 时的后代数, 则 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_i$ 独立同分布, 都服从相同的几何分布

$$P(Y_k = j) = p_{1j}(t) = \beta^{j-1}\alpha, \quad j \geqslant 1.$$

t 时的生物总数 $X(t) = \sum_{k=1}^{i} Y_i$ 服从负二项分布

$$P_{ij}(t) = P(X(t)=j|X(0)=i) = C_{j-1}^{i-1}\beta^{j-i}\alpha^i, j \geqslant i \geqslant 1.$$

注2. Yule过程的转移速率矩阵为

$$
Q = \begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & & & & \\
& -2\lambda & 2\lambda & & & \\
& & \ddots & \ddots & & \\
& & & -n\lambda & n\lambda & \\
& & & & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
$$

可以通过求解 Kolmogorov 向前方程

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I$$

得到转移概率，参考《随机过程及其应用（第二版）》，陆大絟，张颢，清华大学出版社，8.4.2节。

11.2 生灭过程

若以$X(t)$表示某动物群体在时刻t的个体数量，因为动物有出生也有死亡和迁移，所以比纯生过程更合理的假设是每次该群体中动物的数目可以增加或减少，所以我们本节考虑生灭过程。

Definition 11.3 (生灭过程) *设 $\{\lambda_i|i \geqslant 0\}$, $\{\mu_i|i \geqslant 1\}$ 是非负数列, 满足 $\lambda_i + \mu_i > 0$. 如果连续时间Markov链 $\{X(t)\}$ 有状态空间 $I = \{0, 1, 2, \cdots\}$ 和转移速率矩阵*

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix},$$

则称 $\{X(t)\}$ 是(齐次)生灭过程 (birth and death process), 且称 λ_i 为出生率, 称 μ_i 为死亡率。

一般生灭过程的转移概率难以计算，特别地，对于线性齐次生灭过程有如下结果：

Proposition 11.4 *设$\{X(t)\}$ 为线性齐次生灭过程，即$\lambda_n = n\lambda$，$\mu_n = n\mu$，则对于$j \geq 1$*

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{k} \binom{i+j-k-1}{j-k} [\alpha(t)]^{i-k} [\beta(t)]^{j-k} (1-\alpha(t)-\beta(t))^k$$

对于$j = 0$

$$P_{i0}(t) = [\alpha(t)]^i$$

其中

$$\alpha(t) = \frac{\mu(1-\exp((\lambda-\mu)t))}{\mu - \lambda\exp((\lambda-\mu)t)}, \quad \beta(t) = \frac{\lambda}{\mu}\alpha(t)$$

证明参考《随机过程及其应用（第二版）》，陆大絟，张颢，清华大学出版社，8.4.3节。

注. 0状态是吸收态，如果生灭过程进入0状态则意味着群体的灭绝，我们考察当t趋于无穷大时，灭绝概率$P_{i0}(t)$的渐近性

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} P_{i0}(t) &= \lim_{t\to\infty}[\alpha(t)]^i = \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\mu(1-\exp((\lambda-\mu)t))}{\mu-\lambda\exp((\lambda-\mu)t)}\right]^i \\ &= \begin{cases} 1, & \lambda \leqslant \mu \\ \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^i, & \lambda > \mu \end{cases}\end{aligned}$$

注意到：当出生率λ和死亡率μ相等的时候，渐近灭绝概率为“1”！这和直观有很大出入，因为一般情况下人们都认为如果出生和死亡相抵，那么群体数量将保持均衡，而事实却是群体将趋于灭亡。即便是出生率高于死亡率，如果两者相差不多且初始值较小，仍然有非常大灭绝概率。此外，当$\lambda=\mu$时，均值将始终保持在初始值上，不随时间而改变。可是群体却在以概率 1 走向灭绝。

很多时候转移概率是不好得到的，我们也没法得到时刻t生灭过程$X(t)$的瞬时分布，但是很多情况下我们关注的是Markov链平稳后的性质，即需要计算的是极限分布。

记$p_j(t) \triangleq P(X(t)=j)$，$j\in E$，由有界收敛定理，

$$\begin{aligned}p_j \triangleq \lim_{t\to\infty} p_j(t) &= \lim_{t\to\infty}\sum_{i\in E} P(X(0)=i)P_{ij}(t) \\ &= \sum_{i\in E} P(X(0)=i)\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) \\ &= \pi_j \sum_{i\in E} P(X(0)=i) = \pi_j\end{aligned}$$

即瞬时分布的时间极限和转移概率的极限分布一样，都为不变分布π。对于齐次生灭过程，它的极限分布有以下结果。

Proposition 11.5 设$\{X(t)\}$ 为一个齐次生灭过程，记

$$Z := 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}$$

则

$$p_j = \begin{cases} (Z)^{-1}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}, & Z<\infty \\ 0, & Z=\infty \end{cases}$$

Proof: 本质上是求解不变方程：

$$pQ = 0, \quad p = (p_0, p_1, \cdots)$$

由生灭过程Q矩阵的定义，即求解

$$0 = \lambda_{n-1}p_{n-1} - (\lambda_n + \mu_n)p_n + \mu_{n+1}p_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{11.1}$$

我们规定$p_{-1} := 0$且$\mu_0 := 0$，它符合物理直观，因为当群体数目为 0 时，不可能继续减少。于是当$n = 0$时，初始条件为

$$-\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 = 0 \Longrightarrow p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0$$

(11.1)式改写成如下形式

$$\mu_{n+1}p_{n+1} - \lambda_n p_n = \mu_n p_n - \lambda_{n-1}p_{n-1}$$

递推可得

$$\mu_{n+1}p_{n+1} - \lambda_n p_n = \cdots = \mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0 = 0$$

即

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}p_{n-1} = \cdots = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1}p_0$$

若

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1} < \infty$$

则归一化即得$\{X(t)\}$的不变分布，便是其极限分布。

若$1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_1\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdots\mu_2\mu_1} = \infty$，那么$\{X(t)\}$的不变分布不存在，其极限分布为0。 ∎

11.3 传染病模型

m个同种生物中有若干个体感染病毒，所有个体的行为独立。在长为h的时间内，任何两个个体相遇的概率为$\lambda h + o(h)$. 未感染个体遇到感染者被传染, 被传染的个体将永远感染病毒, 并以相同的方式传染其他未感染个体。

假设当$t=0$ 时有i个感染者, 计算：

(1) 在时间 $(0,h]$ 内新增加一个感染者的概率;

解. 记条件概率 $P_i(\cdot):=P(\cdot|X(0)=i)$，$k=1,2,\cdots,i$, $j=1,2,\cdots,m-i$，用A_{kj}表示时间$(0,h]$ 内第k个感染者传染了第j个未感染者，那么$\{A_{kj}\}$相互独立，且

$$P\left(A_{kj}\right)=\lambda h+o\left(h\right).$$

$(0,h]$内新增加一个感染者等价于恰有一个A_{kj}发生。因为一共有$i\cdot(m-i)$个A_{kj}, 所以

$$\begin{aligned}P_{i,i+1}\left(h\right)=&P_i\left(\text{恰有一个}A_{kj}\text{发生}\right)\\=&C^1_{i(m-i)}P\left(A_{11}\right)\left[1-P\left(A_{11}\right)\right]^{i(m-i)-1}\\=&i\left(m-i\right)\left(\lambda h+o\left(h\right)\right)\left(1-\lambda h+o\left(h\right)\right)^{i(m-i)-1}\\=&i\left(m-i\right)\lambda h+o\left(h\right).\end{aligned}$$

(2) 在时间 $(0,h]$ 内, 没有新增感染者的概率;

解. 根据(1)的符号，没有新增感染者的概率是

$$\begin{aligned}P_{ii}\left(h\right)=&P_i\left(\text{所有}A_{kj}\text{均未发生}\right)\\=&\left(1-P\left(A_{11}\right)\right)^{i(m-i)}\\=&\left(1-\lambda h+o\left(h\right)\right)^{i(m-i)}\\=&1-i\left(m-i\right)\lambda h+o\left(h\right).\end{aligned}$$

(3) 如果从 $t=0$ 开始, 等待时间 T_i 后新增加一个感染者, 求 T_i 的分布和数学期望;

解. 用 $X(t)$表示t时感染者的总数，因为感染者的行为独立，等待传染下一个个体的时间具有无记忆性，所以$\{X(t)\}$是一个Markov链。

对于$j\geq i+2$，有

$$\begin{aligned}P_{ij}\left(h\right)\leq&\sum_{k=i+2}^{m}P_{ik}\left(h\right)=1-P_{ii}\left(h\right)-P_{i,i+1}\left(h\right)\\&=1-\left[1-i\left(m-i\right)\lambda h+o\left(h\right)\right]-\left[i\left(m-i\right)\lambda h+o\left(h\right)\right]\\&=o\left(h\right).\end{aligned}$$

所以

$$P_{ij}(h)=\begin{cases}1-i(m-i)\lambda h+o(h), & j=i,\\ i(m-i)\lambda h+o(h), & j=i+1,\\ o(h), & j\geqslant i+2.\end{cases}$$

那么转移速率为

$$q_{ij}=P'_{ij}(0)=\begin{cases}-i(m-i)\lambda, & j=i,\\ i(m-i)\lambda, & j=i+1>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由转移速率矩阵的概率意义，我们知道停留时间T_i服从参数为$q_i=|q_{ii}|$的指数分布，其数学期望为

$$\mathbb{E}[T_i]=\frac{1}{q_i}=\frac{1}{i(m-i)\lambda},1\leqslant i\leqslant m-1.$$

(4) 如果 $t=0$ 时只有一个感染者, 平均等待多长时间可使整个群体都被感染?

解. 连续时间Markov链$\{X(t)\}$是一个状态空间为 $E=\{0,1,\cdots,m\}$ 的纯生过程，从1出发到达m所用的时间为$T=\sum_{i=1}^{m-1}T_i$，其数学期望是

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T]&=\sum_{i=1}^{m-1}\mathbb{E}[T_i]=\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i(m-i)}\\&=\frac{1}{m\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{m-i}\right)\\&=\frac{2}{m\lambda}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{i}.\end{aligned}$$

对于较大的群体，用近似公式$\sum_{i=1}^{m-1}i^{-1}\approx\ln(m-1)$，可得

$$\mathbb{E}[T]\approx\frac{2\ln(m-1)}{m\lambda}.$$